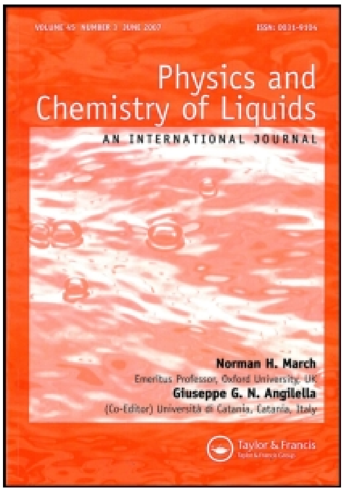

Physics and Chemistry of Liquids
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713646857

Profil de la surface libre d'une couche mince liquide isolante chargée

Michel Le Helley[a]; Guy Mesnard[a]
[a] Université Claude Bernard de Lyon,

To cite this Article Helley, Michel Le and Mesnard, Guy(1976) 'Profil de la surface libre d'une couche mince liquide isolante chargée', Physics and Chemistry of Liquids, 5: 4, 283 — 292
To link to this Article: DOI: 10.1080/00319107608084124
URL: http://dx.doi.org/10.1080/00319107608084124

Phys. Chem. Liq., 1976, Vol. 5, pp. 283-291

Printed in Dordrecht, Holland

Profil de la Surface Libre d'une Couche Mince Liquide Isolante Chargée

MICHEL LE HELLEY

et

GUY MESNARD

Université Claude Bernard de Lyon

On considère la déformation de la surface libre d'une couche mince liquide isolante portée à un potentiel uniforme V par rapport à un substrat conducteur. L'équation différentielle du problème est résolue numériquement, pour des déformations de faible et de forte amplitude.

The deformation of the free surface of a thin layer of an insulating liquid maintained at a uniform potential V vs a conducting substrate is considered. The differential equation of the problem is solved numerically for deformations of small and of large amplitude.

1 EQUATIONS DU PROBLEME

Une couche mince liquide isolante déposée sur un substrat conducteur plan horizontal relié à la masse se déforme en surface si l'on y apporte des charges.[1] Nous nous plaçons dans des conditions où le potentiel pris par la surface a la valeur uniforme V: c'est un cas usuel correspondant à un flux uniforme de charges avec réajustement de leur distribution. On se propose de préciser la hauteur z de liquide en fonction des coordonnées de position x et y dans le plan horizontal.

On a montré par ailleurs[2] que, pour trouver la fonction z(x, y), il faut minimiser

$$\iint \mathrm{A}\,d\mathrm{S} - \tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,d\mathrm{Q}$$

sur toute l'étendue liquide, à V constant, A étant la tension superficielle, dS l'élément de surface libre correspondant à l'aire dx dy et dQ la charge correspondante; on néglige la pesanteur. On a

$$dS = dx\,dy\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$$

et on adopte l'expression approchée

$$dQ = \frac{\epsilon\,dx\,dy}{z}V.$$

Finalement il faut minimiser

$$J_1 = \iint \left(A\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} - \frac{\epsilon V^2}{2z}\right) dx\,dy$$

avec la contrainte

$$J_2 = \iint z\,dx\,dy = \nu,$$

où v désigne le volume total du liquide, qui est fixé.

Nous supposerons la surface libre indéfinie et nous considérerons seulement le problème à une dimension x, z étant supposé indépendant de y. On se ramène à la résolution de l'équation d'Euler–Lagrange du calcul des variations

$$\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial I}{\partial z_x'}\right) = 0$$

où $J_1 - \mu J_2 = \iint I\,dx\,dy$, μ étant un multiplicateur de Lagrange. On trouve

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \mu, \qquad \frac{\partial I}{\partial z_x'} = \frac{A z_x'}{\sqrt{1 + z_x'^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial I}{\partial z_x'}\right) = \frac{A z_x''}{(1 + z_x'^2)^{3/2}}$$

d'où l'équation

$$Az'' = (1 + z'^2)^{3/2}\left(\frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \mu\right) \tag{1}$$

Nous résoudrons numériquement cette équation. On peut, si z_x' reste assez faible partout, la simplifier sous la forme

$$Az'' = \frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \mu \tag{2}$$

Nous envisagerons aussi ce cas, pour lequel il faut aussi rechercher une solution numérique; cependant deux situations particulières ont pu être précisées de façon approchée par des méthodes analytiques.[2]

Pour le calcul numérique, il convient de préciser les ordres de grandeur des diverses quantités, qui conduisent à des résultats intéressants, obtenus expérimentalement. V est de l'ordre de 1000 volts, A de l'ordre de 50 unités

CGS. L'épaisseur du liquide au repos est de l'ordre de 0,1 mm, la permittivité relative de l'ordre de 2. En un point d'inflexion du profil, on a $z'' = 0$; si z_i est la valeur correspondante de z, on a donc

$$\mu = \frac{\epsilon V^2}{2 z_i^2}.$$

2 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION (2)

Nous commençons par normaliser l'équation en effectuant les chargements de variables

$$Z = \frac{z}{z_0} \quad \text{et} \quad X = \frac{x}{x_0},$$

les quantités Z et X étant sans dimension. En prenant

$$x_0 = \sqrt{\frac{2A}{\epsilon V^2} z_0^3},$$

on la met sous la forme

$$Z'' = \frac{1}{Z^2} - \frac{2\mu z_0^2}{\epsilon V^2}.$$

Cette équation a des solutions périodiques ayant l'allure donnée par la figure 1.

En choisissant pour z_0 un extremum de z, on peut prendre $Z = 1 + \zeta$ avec $|\zeta| \ll 1$, l'amplitude devant être assez faible. On développe alors $\frac{1}{Z^2}$ suivant les puissances de ζ et on ne retient qu'un nombre limité de termes. On a pour ζ l'équation différentielle suivante, avec $\beta = \frac{2\mu z_0^2}{\epsilon V^2}$,

$$\zeta'' = -\beta + \frac{1}{(1+\zeta)^2} = -\beta + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \zeta^n.$$

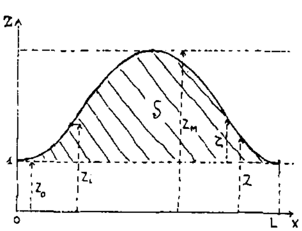

FIGURE 1 Profil de la déformation et aire S limitée par la courbe.

En intégrant une fois et en remarquant que la constante d'intégration est nulle, on trouve aussi

$$\frac{1}{2}\zeta'^2 = -\beta\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^{n+1}.$$

La condition $z_x' \ll 1$ conduit à $\zeta' \ll 1$.

Partons de $\zeta = 0$ et $\zeta' = 0$ pour $X = 0$ et posons $\zeta'' = 1 - \beta - P_2(\zeta)$, $\frac{1}{2}\zeta'^2 = \zeta[1 - \beta - P_1(\zeta)]$; on a

$$P_1(\zeta) = 1 - \frac{1}{1+\zeta},\; P_2(\zeta) = 1 - \frac{1}{(1+\zeta)^2}.$$

Les valeurs de P_1 et P_2 ont été calculées numériquement; les courbes correspondantes sont représentées sur la figure 2. Soit alors la droite d'ordonnée $a = 1 - \beta$; son intersection avec P_1 donne la valeur de ζ autre que zéro conduisant à $\zeta' = 0$, donc le maximum ζ_M de ζ si z_0 est le minimum (a et ζ sont alors positifs) et le minimum ζ_m si z_0 est le maximum (a et ζ sont alors négatifs); nous nous placerons couramment dans le premier cas. L'intersection avec P_1 donne la valeur ζ_i correspondant au point d'inflexion de la courbe. On a d'ailleurs

$$\beta = \frac{1}{(1+\zeta_i)^2},$$

ce qui correspond, pour les quantités non normalisées, à

$$\beta = \left(\frac{z_0}{z_i}\right)^2.$$

Quand a est voisin de zéro, la déformation a une faible amplitude et on

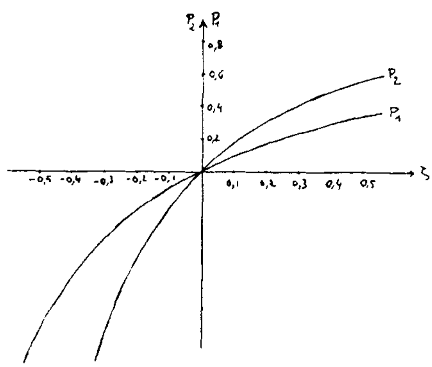

FIGURE 2 Courbes donnant $P_1(\zeta)$ et $P_2(\zeta)$.

trouve pour ζ_i sensiblement la moitié de ζ_M. On a d'ailleurs sensiblement $\zeta'' = 1 + \beta - 2\zeta$, d'où la solution

$$\zeta = \frac{a}{2}(1 - \cos\sqrt{2}\,X) \tag{3}$$

solution sinusoïdale, déjà obtenue précédemment,[2] d'amplitude $\frac{a}{2}$, avec la longueur d'onde normalisée $L = \pi\sqrt{2}$.

Il convient par ailleurs de s'intéresser à l'aire hachurée S (fig. 1). Elle permet de faire intervenir aussi l'épaisseur de la couche au repos. La valeur Z_r correspondante est en effet donnée par

$$Z_r = Z_0 + \frac{S}{L} \tag{4}$$

Pour trouver la solution $\zeta(X)$ complète, nous avons employé des méthodes classiques de calcul numérique, notamment la méthode Predictor-Corrector de Milne; S a été calculée par la méthode de Simpson. Pratiquement, on

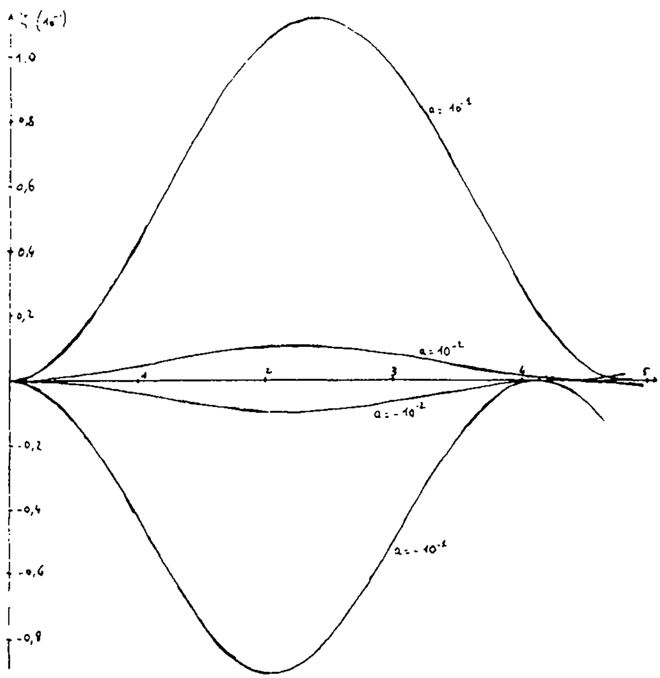

FIGURE 3 Courbes $\zeta(X)$ pour les valeurs -10^{-2}, 10^{-2}, -10^{-1} et 10^{-1} de a.

commence à avoir des écarts par rapport à la solution (3) lorsque $|a|$ dépasse 10^{-2}. La figure 3 présente quatre courbes $\zeta(X)$ correspondant aux valeurs -10^{-2}, 10^{-2}, -10^{-1}, 10^{-1} de a. Les deux dernières commencent à s'écarter d'une sinusoïde.

En ce qui concerne L, le calcul numérique a donné 4,425 pour les faibles valeurs de $|a|$ (la valeur théorique limite est $\pi\sqrt{2} = 4{,}44$); pour $a = 10^{-2}$, on a obtenu un résultat voisin, L = 4,475, tandis que les valeurs 10^{-1} et -10^{-1} de a ont donné respectivement L = 4,825 et 4,125, résultats déjà nettement différents. Pour S le calcul numérique a donné, pour a variant de 0 à 10^{-2},

$$S = k\,a \tag{5}$$

avec k = 2,22; le résultat mathématique limite pour k est effectivement $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2{,}22$. Par contre, pour $a = 10^{-1}$, on a trouvé le résultat nettement différent k = 2,71.

Dans la pratique, pour un liquide donné (A et ϵ fixés), l'épaisseur au repos du liquide est aussi une donnée du problème. Les relations (4) et (5) conduisent à

$$z_r = z_0\left(1 + \frac{ka}{L}\right). \tag{6}$$

Pour z_r donné, on peut envisager de tirer z_0 de cette formule, mais a dépend de z_0 avec un coefficient où figure z_i qui n'est pas connu a priori. C'est pourquoi, en fait, on doit opérer à l'envers. On fixe a: compte tenu de la valeur $z_r = h$, la relation (6) donne alors z_0 et en même temps la valeur de z_i se trouve déterminée. Voici deux exemples correspondant à la même valeur de z_r:

z_r	a	k	L	z_0	z_i
h	10^{-3}	2,22	4,425	0,9995h	h
h	10^{-1}	2,71	4,825	0,947h	0,9985h

On voit, d'après ces exemples, que z_i diminue (très légèrement) quand a croît. Il faut par ailleurs noter que l'influence de l'état électrique, c'est-à-dire de V, se manifeste par l'intermédiaire de z_i, qui vaut en effet $V\sqrt{\frac{\epsilon}{2\mu}}$. Mais cette expression contient aussi μ, qui n'est pas connu a priori. μ varie avec V, mais dépend aussi des conditions aux limites du problème; c'est pourquoi, pour une valeur donnée de V, on peut avoir des valeurs de z_i et par suite de z_0 et de a très variées.

3 RESOLUTION DE L'EQUATION (1)

On normalise ici en posant $X = \alpha x$, $Z = \alpha z$ avec le choix

$$\alpha = \frac{2A}{\epsilon V^2}.$$

Il vient pour Z(X) l'équation $Z'' = (1 + Z'^2)^{3/2}\left(\frac{1}{Z^2} - \gamma\right)$, où le paramètre γ est donné par

$$\gamma = \mu\frac{\epsilon V^2}{2A^2} = \left(\frac{1}{\alpha z_i}\right)^2 = \frac{1}{Z_i^2}.$$

Pour résoudre cette équation, on part des conditions $Z = Z_0$, $Z' = Z'_0 = 0$ et on choisit une valeur du paramètre γ. On partage alors l'intervalle de variation de X en parties de pas H. Connaissant Z_0 et Z'_0, l'équation différentielle donne Z''_0, d'où $Z'_1 = Z''_0 H$ et

$$Z_1 = \frac{Z'_0 + Z'_1}{2} H + Z_0,$$

et on continue de la même facon de proche en proche. On a enfin calculé $\int ZdX$ par la méthode de Simpson pour trouver la moyenne Z_r de Z qui donne l'épaisseur au repos. On introduit toujours la période spatiale normalisée L, ainsi que les extremums Z_M et Z_m de Z dont l'un correspond à Z_0. L'erreur de discrétisation se manifeste au fur et à mesure que X croît; c'est donc la fin de la courbe qui est la moins précise (notamment Z_M si on est parti de Z_m).

On a vérifié, pour $\gamma = 0{,}1$ et $\gamma = 0{,}2$, qu'en faisant varier Z_0 de 1 à 5, L ne variait pas pour γ donné. Il y a donc une relation entre L et γ. Pour l'intervalle 0,04 à 90 de variation de γ, on a trouvé que L variait de 0,15 à 50 environ, avec la loi

$$L = \frac{4{,}48}{\gamma^{0{,}72}}$$

soit $L = 4{,}48\ Z_i^{1{,}44}$. Pour $\gamma = 10^{-3}$, on a obtenu L = 2000, ce qui n'est pas encore très différent. Avec l'équation simplifiée, et pour les déformations de faible amplitude, la théorie approchée[2] donne la "longueur d'onde"

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\epsilon}}\frac{z_i^{3/2}}{V},$$

ce qui, en normalisant, conduit à $L = \pi\sqrt{2}\,Z_i^{3/2} = 4{,}45\ Z_i^{3/2}$. Ceci est très voisin de ce qui a été obtenu numériquement avec l'équation plus précise et et dans une large gamme. Pour z_i très petit, le calcul avec l'équation approchée (qui est d'ailleurs mal vérifiée alors) donne à la limite[2]

$$\lambda = 2\sqrt{6}\sqrt{\frac{Ah}{\epsilon}}\frac{z_i}{V},$$

d'où, en normalisant, $L = \sqrt{6}\sqrt{2}\, Z_r^{1/2} Z_i$, ce qui est assez différent.

Le calcul numérique a donné d'autre part $Z_M Z_m = Z_i^2$. L'étude mathématique avait donné ce résultat pour l'équation simplifiée[2], mais on le trouve aussi pour l'équation plus rigoureuse.

On a par ailleurs obtenu entre Z_r, Z_m, Z_M et Z_i la relation

$$\frac{Z_r - Z_m}{Z_M - Z_i} = k,$$

où k varie légèrement avec les conditions, la valeur moyenne étant de l'ordre de 0,9. Pour les déformations de très faible amplitude, le calcul conduit à $k = 1$, tantdis que pour z_i très petit un calcul grossier a donné[2] $k = 0{,}75$ (k est alors égal à $\frac{Z_r}{Z_M}$). En éliminant Z_M entre les deux dernières relations, on trouve que Z_r, Z_m et Z_i sont liés par la relation $Z_m(Z_r - Z_m) + kZ_iZ_m - kZ_i^2 = 0$. V n'intervient pas. Si on donne z_r et V, on impose Z_r et il reste une relation entre Z_i et Z_m, c'est-à-dire entre γ et Z_m ; le profil de la courbe n'est pas imposé pour autant.

Des exemples de courbes obtenues sont présentés sur le figures 4, 5 et 6. La figure 4 correspond à une valeur donnée de Z_r, la figure 5 à une valeur donnée de Z_m ; la figure 6 permet de comparer trois cas très différents, ayant exigé de prendre des échelles très différentes. Le tableau ci-dessous précise les valeurs des paramètres pour les diverses courbes numérotées de 1 à 9

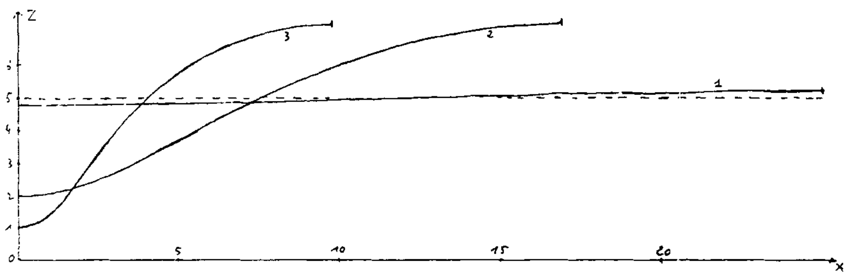

FIGURE 4 Courbes Z(X) pour Z_r donné: 1: $\gamma = 0{,}04$, $\zeta_m = 4{,}8$ 2: $\gamma = 0{,}07$, $\zeta_m = 2$ 3: $\gamma = 0{,}14$, $\zeta_m = 1$.

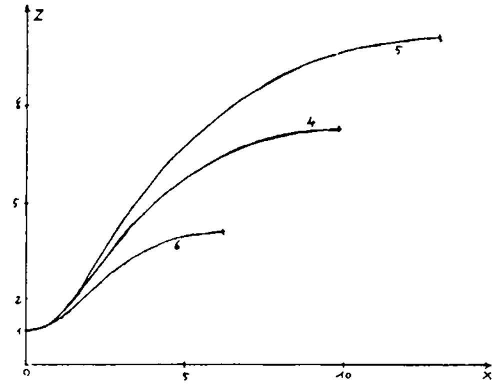

FIGURE 5 Courbes Z(X) pour Z_m donné: 4: $\gamma = 0{,}14$, $\zeta_m = 1$ 5: $\gamma = 0{,}10$, $\zeta_m = 1$ 6: $\gamma = 0{,}25$, $\zeta_m = 1$.

(les courbes 3 et 4 sont d'ailleurs les mêmes):

Courbes	1	2	3 et 4	5	6	7	8	9
γ	0,04	0,017	0,14	0,10	0,25	0,10	90	10^{-3}
ζ_m	4,8	2	1	1	1	2	0,1	1

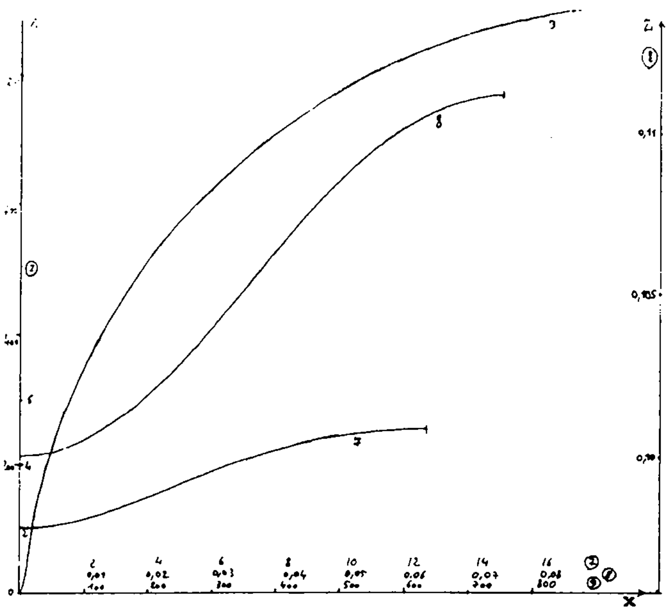

FIGURE 6 Courbes Z(X): 7: $\gamma = 0{,}10$, $\zeta_m = 2$ 8: $\gamma = 90$, $\zeta_m = 0{,}1$ 9: $\gamma = 10^{-3}$, $\zeta_m = 1$.

On note sur ces courbes que lorsque l'amplitude de la variation de Z est assez grande, la partie supérieure de la courbe est assimilable à une portion de cercle. Ceci rejoint l'étude antérieure[2]. L'écart entre Z_M et Z_m augmente avec la différence entre Z_i et Z_m et alors le rayon (normalisé) du cercle diminue, tandis que la portion de courbe pratiquement confondue avec le cercle augmente vis-à-vis de sa longueur totale. On peut préciser en calculant le rayon du cercle d'après l'expression de la courbure au sommet de la courbe; on trouve

$$R = 1/\left(\frac{1}{Z_i^2} - \frac{1}{Z_M^2}\right).$$

Ceci est voisin de Z_i^2, c'est-à-dire de $Z_m Z_M$, pour $Z_i \ll Z_M$. En dénormalisant, on trouve alors

$$r = \frac{2A}{\epsilon V_0^2} z_i^2,$$

ce qui rappelle une valeur obtenue par le calcul[2]. Il est intéressant de comparer R et L; placons-nous seulement dans le cas où $R = Z_i^2$; puisque $L = \pi\sqrt{2}\, Z_i^{1,5}$, ou a

$$R^2 = \frac{L^3}{2\sqrt{2}\pi^3}.$$

Références

1. G. Sabra, J. Fornazéro et G. Mesnard, *Phys. and Chem. of Liquids*, **5**, 125 (1976).
2. G. Sabra, J. Fornazéro et G. Mesnard, "Physics and Chem. of Liquids."